

國立聯合大學 104 學年度

(院)學系轉學生招生考試試題紙

科目： 微 積 分 第 1 頁共 2 頁

一、選擇題：單選，每題 3 分，共 30 分。(請在答案卷上依序寫出題號及答案)

1. 下列哪一個極限值是不正確的？

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

2. 若方程式 $x^2y + y^3 = 4 + 5x$ 定義 y 為 x 的可微分函數，則 $\frac{dy}{dx} =$

- (1) $\frac{2xy-5}{x^2+3y^2}$ (2) $\frac{5-2xy}{x^2+3y^2}$ (3) $\frac{x^2+3y^2-5x}{5-2xy-y^3}$ (4) $\frac{x^2+3y^2}{5-2xy}$ (5) $\frac{5-2xy-y^3}{x^2+3y^2-5x}$

3. 令 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & x \geq 2 \\ 2x-3, & x < 2 \end{cases}$ ，則下列敘述何者不正確？

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ (2) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ (3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ (4) $f(2)$ 有意義 (5) $f(x)$ 在 $x = 2$ 不連續(discontinuous)

4. 下面有關曲線 $y = \frac{x+2}{x^2-1}$ 的漸近線的敘述何者正確？

- (1) $y = 1$ 為水平漸近線 (2) $y = -2$ 為水平漸近線 (3) $x = -2$ 為垂直漸近線
(4) $x = 1$ 為垂直漸近線 (5) $y = 0$ 為垂直漸近線

5. $f(x) = x^4 - 4x^3$ ，下列敘述何者不正確？

- (1) $(0, 0)$ 為 f 圖形上的反曲點(inflection point) (2) $f(3)$ 為 f 的絕對極小值(absolute maximum value)
(3) $f(x)$ 有兩個臨界數(critical number) (4) $f(3)$ 為 f 的局部極小值(local maximum value)
(5) $f(0)$ 為 f 的局部極大值(local minimum value)

6. 已知 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$ ，則 $f'(x) =$

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+2)3^{n+1}}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+2)3^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$ (4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 3^n}$ (5) 以上皆非

7. 被曲線 $y = \sqrt{x}$ 和直線 $2y = x$ 所圍區域的面積可用下列哪一個積分式表示？

- (1) $\int_0^4 \pi[(\frac{1}{2}x)^2 - (\sqrt{x})^2] dx$ (2) $\int_0^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x) dx$ (3) $\int_0^2 (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x) dx$ (4) $\int_0^2 \pi[(\frac{1}{2}x)^2 - (\sqrt{x})^2] dx$
(5) $\int_0^4 (\frac{1}{2}x - \sqrt{x}) dx$

8. 令 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 7$ ，則下面有關 $f(x, y)$ 的敘述何者正確？

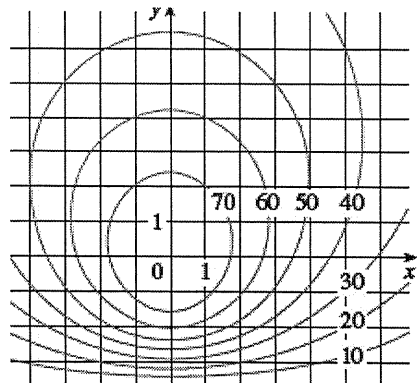
- (1) $f(1, \frac{1}{2})$ 為 f 的一個局部極大值(local maximum value) (2) $f(0, 0)$ 為 f 的一個局部極大值(local maximum value)
(3) $f(0, 0)$ 為 f 的一個局部極小值(local minimum value) (4) $(1, \frac{1}{2})$ 為 f 的一個鞍點(saddle point)
(5) f 沒有局部極大值(local maximum value)

9. 若 $z = x^2y + y^3$ ， $x = s^2 + t^2$ ， $y = 2st$ ，則 $\frac{\partial z}{\partial s} =$

- (1) $(2x + y^3)(2s + t^2) + (x^2 + 3y^2)(2t)$ (2) $(2x)(2s) + (x^2 + 3y^2)(2t)$ (3) $(2xy)(2t) + (x^2 + 3y^2)(2s)$
(4) $(2xy)(2s) + (x^2 + 3y^2)(2t)$ (5) $(2xy + y^3)(2s + t^2) + (x^2 + 3y^2)(2t)$

10 已知下圖為某函數 $f(x, y)$ 的等高線圖(contour map)，下列哪個敘述是不正確的？

- (1) $f(1, 2) \approx 70$ (2) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) < 0$ (3) $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) > 0$ (4) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -2) < 0$
 (5) f 在 $(0, 0)$ 附近有局部極大(local maximum)值。



二、填充題：每格 4 分，共 16 分。(請在答案卷上依序寫出每格編號(1)、(2)、(3)、(4)及答案)

1. 冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n^2 3^n}$ 的收斂半徑(radius of convergence)為 (1)
2. 若 $\int_0^6 f(t) dt = 3$ 且 $\int_6^{10} f(t) dt = 5$ ，則 $\int_0^{10} f(t) dt =$ (2)
3. $f(x) = \sin(x^2)$ ， $\frac{d}{dx} \left(\int_{\pi/2}^x f(t) dt \right) =$ (3)。
4. 將下面的逐次積分(iterated integral) 交換積分順序：
 $\int_0^2 \int_{2x}^4 e^{y^2} dy dx = \int_a^b \int_c^d e^{y^2} dx dy$ ，其中 $(a, b, c, d) =$ (4) [請將 a, b, c, d 依序列出]

三、計算題：共 54 分。(請在答案卷上詳列計算過程，否則不予計分)

1. 求 $\frac{dy}{dx}$ ：(i) $y = x^3 \cos(2x)$ (ii) $y = \ln(x^3 + 1)$ (8 分)
2. 若 $u = e^{x^2 y}$ ，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ (請依照符號所給的順序作偏微分)。(6 分)
3. $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3 y$ (8 分)
 - (1) 求 f 在 $(1, 2)$ 的梯度向量(gradient) $\nabla f(1, 2)$ 。
 - (2) 求 f 在 $(1, 2)$ 的沿著方向 $\mathbf{u} = \langle -4, 3 \rangle$ 的方向導數(direction derivative)
4. 求下列積分：(32 分)
 - (i) $\int x^2 e^{3x} dx$
 - (ii) $\int \frac{x^2 + 6}{(x-1)(x+1)^2} dx$ (Hint: 先做部分分式展開)
 - (iii) $\iint_R e^{(x^2+y^2)} dA$ ，其中 $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ (Hint: 使用極座標)
 - (iv) $\iint_R (x+2y) dA$ ，其中 R 為 xy 平面上由 $y = x^2$ ， $y = 0$ 和 $x = 1$ 所圍成的區域