國立聯合大學 105 學年度

寒假轉學生招生考試試題紙

單選題(每題 4 分)

1. 下列哪一個微分方程式的通解(general solution)為 $y=\sqrt{\frac{1}{2}xe^x+Cxe^{-x}}$，其中 C 為任意常數?

   (A) $yy'+(x-1)y^2=x^2e^x$; (B) $2xyy'+(x-1)y^2=x^2e^x$; (C) $xy'+(x-1)y^2=x^2e^x$; (D) $(2x+1)y'+x^2y^2=xe^x$.

2. 若 $y''+6y'+13y=0$ 的通解為 $y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$，其中 C_1 和 C_2 為任意常數，則 $a+b=?$

   (A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5.

3. 下列哪一個微分方程式的通解為 $y=x^{-2}[C_1\cos(3\ln x)+C_2\sin(3\ln x)]$，其中 C_1 和 C_2 為任意常數?

   (A) $x^2y''+5xy'+13y=0$; (B) $4x^2y''+xy'+y=0$; (C) $y''+4y'+13y=0$; (D) $y''+xy'+y=0$.

4. 若 $y_p(x)$ 為微分方程式 $y''-2y'-3y=3e^{2x}$ 的特殊解(particular solution)，則 $y_p(0)=?$

   (A) -1; (B) 0; (C) 1; (D) 2.

5. 下列哪一組函數為線性相依(linearly dependent)?

   (A) e^x 和 xe^x; (B) $\cos 2x$ 和 $\sin x\cos x$; (C) $\ln x$ 和 $\ln\sqrt{x}$; (D) $x+1$ 和 $1-x$.

6. 令 $f(t)=(t+1)H(t-1)$，其中 $H(t)$ 為 Heaviside 函數，則 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換(Laplace transform)為何?

   (A) $s^{-2}(2se^s+1)$; (B) $s^{-2}(se^{-s}+2)$; (C) $s^{-2}(e^{-s}+2)$; (D) $s^{-2}(e^{-s}+2s)$.

7. $F(s)=se^{-2s}(s^2+9)^{-1}$ 之反拉普拉斯轉換(inverse Laplace transform)為何? (A) $\cos(2(t-3))H(t-3)$;

   (B) $\cos(3(t-2))H(t-2)$; (C) $\cos(2(t-2))H(t-3)$; (D) $\cos(3(t-2))H(t-3)$.

8. 令 $f(t)=2t+\int_0^t f(t-\tau)e^{-\tau}d\tau$，則 $f(t)=?$ (A) e^t+2te^t; (B) $2t+t^2$; (C) $2\ln t+t\ln t$; (D) $2\cos t+\sin t$.

9. $\int_0^5 t\delta(t-3)dt+\int_{-3}^0 t^2\delta(t-1)dt=?$ (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

10. 下列何者<u>不是</u>可分離(separable)微分方程式? (A) $[\cos(x+y)-\sin(y-x)]y'=\cos(2x)$; (B) $xy^2y'=\ln(x^y)$;

    (C) $e^{x-y}y'=x^2$; (D) $\sin(x+y)y'=\cos(x-y)$.

11. 下列何者<u>不是</u>正合(exact)微分方程式? (A) $e^y\cos x+1+(e^y\sin x-2y)y'=0$; (B) $e^y\cos(xy)+e^x\sin(xy)y'=0$;

    (C) $y^{-1}\tan x+y^{-2}\ln(\cos x)y'=0$; (D) $x^2+3y+(3x+e^y)y'=0$.

12. 若 $y(x)$ 為微分方程式 $xy'+2y=x^{-1}e^x,\ y(-1)=e^{-1}$ 的解，則 $y(1)=?$ (A) e; (B) $2e$; (C) $3e$; (D) $4e$.

13. 若 $2f(x,y)+f^2(x,y)=6x+C$ 為微分方程式 $(1+y+2x)y'=1-2y-4x$ 的解，則 $f(x,y)=?$

(A) $x+y$; (B) $x-y$; (C) $2x+y$; (D) $x+2y$.

14. 若 **F**, **G**, 與 **H** 為向量，符號 • 表向量點積 (dot product)、× 表向量叉積 (cross product)、‖ ‖表向量大小 (magnitude)，下列何者**錯誤**：(A) 若 **F** 與 **G** 正交，則 $\|\mathbf{F}-\mathbf{G}\|^2=\|\mathbf{F}\|^2+\|\mathbf{G}\|^2$ (B) $\mathbf{F}\times\mathbf{G}=\mathbf{G}\times\mathbf{F}$ (C) $\mathbf{F}\times\mathbf{F}=\|\mathbf{F}\|^2$ (D) $(\mathbf{F}\times\mathbf{G})\bullet\mathbf{F}=0$

15. 若 **F**, **G**, 與 **H** 為向量，α 為純量，符號 • 表向量點積 (dot product)、× 表向量叉積 (cross product)，下列何者為**有意義的運算**：(A) $\mathbf{H}\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$ (B) $\mathbf{H}\bullet(\mathbf{F}\bullet\mathbf{G})$ (C) $(\mathbf{F}\bullet\mathbf{G})\times\mathbf{H}$ (D) $\alpha\bullet\mathbf{F}$

16. $\mathbf{F}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$， $\mathbf{G}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$，向量 **F** 與 **G** 的夾角為 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

17. $\mathbf{F}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$， $\mathbf{G}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$，向量 **F** 與 **G** 的點積為 (A) −2 (B) 0 (C) 2 (D) 4

18. $\mathbf{F}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$， $\mathbf{G}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$，若 $\|\mathbf{F}\times\mathbf{G}\|=\sqrt{10a+b}$，其中 a 與 b 為小於 10 的正整數或 0，則 $a+b$ 為

(A) 2 (B) 7 (C) 11 (D) 14

19. $\mathbf{F}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{G}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{H}=-\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，**F**, **G** 與 **H** 所形成平行六邊形的體積為 $100a+10b+c$，其中 a, b 與 c 為小於 10 的正整數或 0，則 $a+b+c$ 為 (A) 5 (B) 7 (C) 16 (D) 17

20. 純量場 $\varphi(x,y)=x+xy$，若在 (1,1) 的梯度向量為 $\nabla\varphi(1,1)=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$，則 $a+b$ 為 (A) −5 (B) −2 (C) 3 (D) 9

21. 下列何者**錯誤**：(A) 格林定理(Green's Theorem) 用於平面上簡單封閉曲線的線積分 (B) 高斯散度定理(Gauss's Divergence Theorem) 用於空間中簡單封閉曲面的面積分 (C) 史托克定理(Stokes Theorem) 用於空間中簡單封閉曲線的線積分 (D) 向量叉積 (cross product) 可用來計算力對物體所作的功。

22. 向量函數 $\mathbf{F}(t)=2t\mathbf{i}+12\mathbf{j}-t^2\mathbf{k}$，若 $\mathbf{F}(t)$ 在 t=1 時的切線向量為 $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$，則 $a+b+c$ 為

(A) 0 (B) 5 (C) 12 (D) 13

23. 向量場 $\mathbf{F}(x,y,z)=y\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}$，則 $\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{F})=$ (A) −4 (B) 0 (C) 5/2 (D) $2\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}$

24. 一質點受力 $\mathbf{F}=2y\mathbf{i}+(3x-2y^4)\mathbf{j}$ 作用，以逆時鐘方向繞頂點為 (0,0), (2,0), (2,3) 與 (0,3) 的長方形邊界一圈，求此力對質點所作的功為 (A) 5/3 (B) 7/4 (C) 3 (D) 6

25. 若 $f(x,y,z)$，且 Σ 為平面 $z=2x-2y$ 在 $0\le x\le 1, 0\le y\le 2$ 的部分，則面積分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)d\sigma=?$

(A) −6 (B) −3 (C) 2/5 (D) 8